

MATHEMATIQUES
(Voie générale)

DURÉE : 4 HEURES
Coefficient 5

EXERCICE I

Deux personnes A et B jouent à un jeu de hasard. A chaque coup celui qui perd donne 1 franc à l'autre (les capitaux de A et B sont supposés illimités). Malheureusement pour A le jeu n'est pas équitable et à chaque coup la probabilité de gain de A est p = 0,45.

Après qu'ils aient joué n fois, on note X la variable aléatoire "nombre de succès de A" et Y la variable aléatoire "gain de A".

1° Quelle est la loi de X ? Valeurs de E(X) et de V(X) ?
Mêmes questions pour Y.

2° En prenant n = 100 estimer la probabilité pour que A ait un gain :
a) positif ou nul,
b) supérieur ou égal à 7 francs.

3° Estimer une valeur n_0 telle que si $n > n_0$, la probabilité pour que A ait un gain strictement positif, soit inférieure à 0,05.

Extrait de la table de la fonction $\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670

A SUIVRE

EXERCICE II

On considère $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré au plus égal à n .

1° Montrer que l'ensemble des polynômes p_k $(0 \leq k \leq n)$ définis par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $p_k(x) = x^k$,

est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ que l'on notera B .

Montrer que l'ensemble des polynômes P_k $(0 \leq k \leq n)$ définis par : pour tout x de $\mathbb{R}$, $P_k(x) = x^k (1-x)^{n-k}$, est une base B' de $\mathbb{R}_n[x]$.

2° Dans le cas n = 2 puis dans le cas n = 3 , écrire les matrices de changement de base Q de la base B à la base B' et Q^{-1} de la base B' à la base B.

3° A tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ on associe le polynôme T(P) de $\mathbb{R}[x]$ défini par :

$$T(P) = \sum_{k=0}^{3} P\left(\frac{k}{3}\right) C_3^k \, x^k \, (1-x)^{3-k} \ .$$

a) Expliciter T(P) dans les cas $P(x) = p_0(x)$ et $P(x) = p_1(x)$.

b) Si $P_1(x) = xP(x)$, montrer que : $T(P_1) = \frac{x(1-x)}{3} \cdot \frac{dT(P)}{dx} + xT(P)$

Déterminer alors T(P) dans les cas suivants :
$P(X) = p_2(x)$ et $P(x) = p_3(x)$.

4° Montrer que T est une application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$.
On considère la restriction de T à $\mathbb{R}_n[x]$ notée T_n .

Montrer que si $n \leq 3$, T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$
et si $n > 3$, T_n est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$.

Ecrire la matrice de T_3 dans la base B, puis dans la base B'.

PROBLEME

I On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln|1+x|}{x}$ si x est différent de 0 et de -1 , et $f(0) = 1$.

1° Montrer que f est continue sur son ensemble de définition .

2° Etudier le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition et déterminer les équations des asymptotes éventuelles.

3° Etude des variations de f .

a) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln|1+x|$.

Après avoir étudié les variations de h , montrer qu'elle possède une seule valeur non nulle α telle que $h(\alpha) = 0$.
Encadrer α par deux valeurs décimales différant entre elles de 0,1.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ (c'est-à-dire qu'elle est dérivable et de dérivée continue sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$) .

c) Etudier les variations de f . Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé direct (1 unité = 1 cm)
Préciser les tangentes du graphe de f en x = 0 et x = 2 .

TOURNEZ la page S.V.P.

II 1° Déduire des résultats précédents les variations et le graphe (G) de la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = |1+x|^{1/x} & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{0\ ;-1\} \\ g(0) = e \end{cases}$$

(On tracera le graphe de g dans un repère orthonormé direct différent de celui de f mais de même unité).

2° Démontrer que les suites u et v définies par

pour tout $n \geq 1$, $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$, et $v_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ sont adjacentes.

Quelle est leur limite commune ?

3° Etablir la double inégalité $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

Calculer l'encadrement de e obtenu pour :
$n = 10$ puis pour $n = 100$.
Que pensez-vous de la précision obtenue ?

III 1° En ne considérant que les valeurs de x dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

tracer dans un repère orthonormé direct (unité = 4 cm)
les graphes des fonctions $x \longmapsto 1-x$; $x \longmapsto x$; $x \longmapsto g(x)$.
Que constatez-vous ?

2° Démontrer que pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

3° En utilisant **III** 2°, déterminer la limite de A(n), quand n croît indéfiniment, de :

$$A(n) = (1+\frac{1}{n^2}) \cdot (1+\frac{2}{n^2}) \cdot (1+\frac{3}{n^2}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{n}{n^2})$$

4° En utilisant **III** 2°, déterminer la limite de B(n), quand n croît indéfiniment, de :

$$B(n) = (1+\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^3}}) \cdot (1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^3}}) \cdot (1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n^3}}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}).$$

5° On se propose de chercher la limite, lorsque n croît indéfiniment, de :

$$C(n) = \cos^2\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \cos^2\frac{1}{\sqrt{n+2}} \cdot \cos^2\frac{1}{\sqrt{n+3}} \cdot \ldots \cdot \cos^2\frac{1}{\sqrt{n+n}}.$$

a) En étudiant les variations des fonctions :

$\varphi_1(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, et : $\varphi_2(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$, sur $\mathbb{R}_+^*$, démontrer

pour tout $x > 0$, $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$,

puis en posant : $x = 2\theta$, montrer que pour tout $\theta \neq 0$:

$$\theta^2 - \theta^4 < \sin^2\theta < \theta^2, \text{ et : } \sin^4\theta < \theta^4.$$

b) Encadrer la somme $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, par deux intégrales de la forme :

$\int_a^b \frac{dx}{x^p}$, avec a et b dépendants de n.

c) En remarquant que : $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, et en utilisant 5° a) et 2° du **III**, trouver un encadrement de C(n). En déduire la limite de C(n) quand n tend vers l'infini.

∴

FIN